Jump Typeの確率積分方程式 (Markov過程)

AUTHOR(S):
土谷, 正明

数理解析研究所講究録
138 巻 1972 年 34-53

Jump type の確率積分方程式

東工大 理 土谷 正明

§0. 序

次の様な integro-differential operator A :

$$Af(x) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^{d} b_i(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

$$+ \int_{|u|\le 1}\left\{f(x+u) - f(x) - \sum_{i=1}^{d}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)u_i\right\}\frac{\varphi(x,u)}{|u|^{d+\alpha}}du$$

但し、
- $a = (a_{ij}(x))$; 有界可測, 対称, 非負定値
- $b = (b_i(x))$; 有界可測
- $\varphi(x,u)$; 非負, 有界可測
- $1 \le \alpha < 2$

に対し, 次の問題を考えよう.

(0) operator A に対し, その semigroup $\{T_t\}$ が

$$T_t f(x) - f(x) = \int_0^t T_s A f(x)\, ds \qquad \forall f \in C_b^2(R^d)^{1)}$$

しをみたす Markov process が唯一つ存在するか？

我々の目的は，A の主要項が退化しないという条件の下で係数 a，b，φ のナメラカサについては，なるべく弱い仮定で，上の問題を解くことである．上の問題(0)を解くには，解析的な方法と確率積分方程式を使う方法がある．(0)に対応する確率積分方程式は，次の形になる

$$(1)\quad x(t) = x(0) + \int_0^t \sigma(x(s))\,d\beta(s) + \int_0^t b(x(s))\,ds + \int_0^t\int c(x(s-),\xi)\tilde{q}(ds,d\xi)$$

但し，σ は a の non-negative square root，$\beta(t)$ は d-dim Brown運動，$q(ds,d\xi)$ は Lévy measure $\frac{d\xi}{|\xi|^{d+1}}$ の対称 Cauchy 過程の random measure [2)]，$c(x,\xi)$ は次の関係をみたす写像；

$$n(x,du) = \int_{\{\xi\,;\,c(x,\xi)\in du\}} \frac{d\xi}{|\xi|^{d+1}} \qquad \begin{pmatrix} x,\ \xi \in R^d \\ du \subset R^d \\ d\xi \subset R^d \end{pmatrix}$$

ここで $n(x,du) = \chi_{(0<|u|\le 1)}(u)\,\dfrac{\varphi(x,u)}{|u|^{d+\alpha}}\,du$.

係数のナメラカサが落ちた時，一意性を示すには，確率積分方程式を使う方法が有効である．それは，確率積分方程式の解の一意性を示せば，そのまま問題(0)の一意性が従うから．そして，解析的な方法だけでは，一意性をいうのは難しいと思われる．一意性を問題にするのは，operator A が，その Markov process を特徴づけるかどうかに関係するからである

上に述べた我々の目的と密接に関連すると思われる結果について簡単にふれておく．

(a) Stroock－Varadhan [7]

a ; positive-definite, bounded continuous, b ; bounded measurable, $\varphi = 0$ の case に (1) を使って問題 (0) を解いた，

(b) Tanaka, Tsuchiya, S. Watanabe (cf. [9])

$a = 0$, $\varphi(x, u) = \varphi(u)$ の case に (1) を扱った．

(c) Komatsu [2]

a ; positive definite, bounded continuous の場合に (1) を扱った．

(d) Motoo (cf. [9]) [5]

$a = 0$ の場合，解析的な方法により Markov process の存在について結果を出した．

以下，我々は，(1) の解の一意性について考える．(1) の解の一意性については，2つの定義がある．(cf. [10])．

その一つは従来から良く調べられてきた pathwise uniqueness で，その十分条件として，

$$\left\{ \; |\sigma(x) - \sigma(y)|^2 + |b(x) - b(y)|^2 + \int |c(x,\xi) - c(y,\xi)|^2 \frac{d\xi}{|\xi|^{d+1}} \right.$$

$$\begin{cases} \le K\,|x-y|^2 \quad (\text{Lipschitz condition}) \\ |\sigma(x)|^2 + |b(x)|^2 + \int |c(x,\xi)|^2 \frac{d\xi}{|\xi|^{d+1}} \le K(1+|x|^2) \end{cases}$$

が知られている．（ K. Ito [1] cf. [6] ）

Lipschitz condition をおくことは，我々の目的にあまりそわないし，又，$c(x,\xi)$ に課された Lipschitz condition は operator A の係数 $\varphi(x,u)$ にどんな条件を課したのかが，あまり明瞭でない．その点を避けるため，我々は，次下で，分布の意味での一意性を考える。即ち，A を定める量 a, b, φ にどうな条件を仮定すれば，(1)の分布の意味での一意性が云えるかということを考える。その方法は，Stroock－Varadhan が diffusion type の確率微分方程式の場合に考え出した idea に沿うものである。

又，その結果として，本尾氏が解析的に構成された Markov process の一意性がどんな場合に示されるかということについても，部分的な解答であるが，与えることができる．

§1. Martingale formulation と確率積分方程式.

$s \geq 0$, R^d ; d次元ユークリッド空間．C^d ; d次元複素空間とする

$\Omega_s = D([s,\infty) \to R^d)$ （$[s,\infty)$ で定義された R^d 値函数

で，右連続，左極限をもつもの全体），$\Omega_s \ni \omega$ に対し，$\omega(t)=x(t,\omega)=x(t)$

$\mathcal{F}_t^s = \sigma(x(u)\,;\, s \leq u \leq t)$ （$x(u)$, $s\leq u\leq t$ によって生成される σ-field）

Ω_0 を Ω，$\mathcal{F}_t^0$ を $\mathcal{F}_t$，$\mathcal{F}_\infty^0$ を $\mathcal{F}$ とかく．$\theta \in \mathbb{C}^d$, $0\leq s\leq t$ に対し

$$X_\theta^s(t) = \exp\left\{\theta\cdot(x(t)-x(s)) - \int_s^t b(x(\tau))d\tau - \frac{1}{2}\int_s^t a(x(\tau))\theta\cdot\theta\, d\tau - \int_s^t\int_{R^d}\left(e^{\theta\cdot u}-1-\theta\cdot u\right)\frac{\varphi(x(\tau),u)}{|u|^{d+\alpha}}du\,d\tau\right\}$$

と定義し，$X_\theta^0(t) = X_\theta(t)$ とかく．$\cdot$ は R^d の内積を表す

$$\mathcal{P}_{s,x} = \left\{ P\,;\ \begin{array}{l} P \text{ is probability measure on } (\Omega_s, \mathcal{F}_\infty^s),\ P(x(s)=x)=1 \\ (X_\theta^s(t), \mathcal{F}_t^s, P)_{t\geq s} \text{ が martingale for } {}^\forall\theta\in R^d \end{array}\right\}$$

$$\mathcal{P} = \left\{ P\,;\ \begin{array}{l} P \text{ is probability measure on } (\Omega, \mathcal{F}) \\ (X_\theta(t), \mathcal{F}_t, P)_{t\geq 0} \text{ が martingale for } {}^\forall\theta\in R^d \end{array}\right\}$$

とおき，$\mathcal{P}_{0,x}$ を $\mathcal{P}_x$ とかく．

定義　${}^\forall x\in R^d$ に対し，$\mathcal{P}_x$ が高々一点集合となるとき (1) の uniqueness が成立するという．

我々の目的は (1) の uniqueness が成立するための条件で a, b, φ について，ナメラカサについてはなるべく弱い条件をさがすことである．まず formulation からすぐ云えることは，

Prop 1.1　(i) すべての $x\in R^d$ について，$\mathcal{P}_x \ni {}^\forall P$ に対し

$P(x(t)\in dx)$ が一意に決まるとき（$\forall t\geq 0$ に対し），(1) の uniqueness が成立．

(ii) すべての $x\in R^d$ について，"$\mathcal{P}_x \ni P_1, P_2$ で互いに絶対連続なものは一致する" ならば "$\mathcal{P}_x$ は高々一点集合" が成立

Proof. (i) は，$P\in\mathcal{P}_x$ の $\mathcal{F}_s$ に関する regular conditional probability を $Q_\omega(d\omega')$ とすると $Q_\omega \in \mathcal{P}_{s,x(s,\omega)}$ P-a.s. ω が云えて．P のマルコフ性が示せて，uniqueness が分る．(ii) は $\mathcal{P}_x$ が convex set より明らか．

次の Proposition が uniqueness を示すのに，本質的に使われる．

<u>Prop. 2.1</u>　次の仮定 (A) の下で，(1) と (2) は同値．

仮定 (A)：
- $a(x)$；有界可測，$\exists A_1, A_2>0$ 定数

  $A_1|\theta|^2 \leq a(x)\theta\cdot\theta \leq A_2|\theta|^2 \quad \forall x\in R^d,\ \theta\in R^d$

  又は $a(x)\equiv 0$
- $b(x)$；有界可測
- $\exists B_1, B_2>0$ 定数　$B_1\leq \varphi(x,u)\leq B_2 \quad \forall x,u$

  $\varphi(x,u)$；可測．

(1) $P\in\mathcal{P}$

(2) P は Probability measure on $(\Omega,\mathcal{F})$ で次の性質を持つ：P に関する Brown 運動 $\beta(t)$ と P に関する対称な

Cauchy過程 $\ell(t)$ が存在して，$x(t)$ は，その $\beta(t)$, $\ell(t)$ に関し (1) をみたす。

但し，P に関する Brown運動 $\beta(t)$ とは，$\beta(t)$ は continuous path をもち $(\mathcal{F}_t)$-adapted で

$$E\left(e^{i\theta\cdot(\beta(t)-\beta(s))}/\mathcal{F}_s\right)= e^{-\frac{1}{2}(t-s)|\theta|^2},\quad (t>s,\ \theta\in R^d)$$

をみたすもので，$\ell(t)$ が P に関する対称な Cauchy過程とは，右連続，左極限を持つ path からなり，確率連続で，$(\mathcal{F}_t)$-adapted で，

$$E\left(e^{i\theta\cdot(\ell(t)-\ell(s))}/\mathcal{F}_s\right) = e^{(t-s)\int\left(e^{i\theta\cdot\xi}-1-\frac{i\theta\cdot\xi}{1+|\xi|^2}\right)\frac{d\xi}{|\xi|^{d+1}}}$$
$$(t>s,\ \theta\in R^d)$$

をみたすものである。

(注) $A_1=0$ or $B_1=0$ のときは，(1) を仮定して (2) の表現を得ることは適当に確率空間を拡げれば可能である。

Prop 1.2 の証明の outline

(1) ⇒ (2) のときだけ示す，簡単のため，$d=1$ とする。

$$\eta(t) = x(t)-x(0)-\int_0^t b(x(s))ds$$

とおくと，仮定(A) の上半分の不等式より，$\forall K>0$, $\forall t\geq 0$ について

$$E\left(e^{K|\eta(t)|}\right) < +\infty$$

が云えて，$A \in \mathcal{F}_t$, $t \geq 0$ のとき，$E(X_\theta(t) : A)$ は，θ の正則函数で，

$$(*)\quad \frac{d^k}{d\theta^k} E\left(X_\theta(t) : A\right) = E\left(\frac{d^k}{d\theta^k} X_\theta(t) : A\right) \qquad k = 1, 2, \cdots$$

が示される．$(X_\theta(t), \mathcal{F}_t, P)$ が $\forall\theta \in R^d$ について，martingale より $(*)$ で，$k = 1, 2$ のときを考えて，$\theta = 0$ とおくと，$\eta(t)$ は 2 乗可積分 martingale で，

$$\langle \eta \rangle_t = \frac{1}{2}\int_0^t a(x(s))ds + \int_0^t \int_{|u| \leq 1} u^2 \frac{\varphi(x(s), u)}{|u|^{1+\alpha}} du\, ds$$

となり，$\langle \eta \rangle$ は連続な increasing process だから，$\eta(t)$ は quasi-left continuous である．従って，$\eta(t)$ は

$$\eta(t) = \eta_1(t) + \eta_2(t)$$

但し，$\eta_1(t)$ は連続な 2 乗可積分 martingale で，$\eta_2(t)$ は compensated sum of jumps of $\eta(t)$ と一意的に分解される.[3)] ここで，$\eta_2(t)$ の具体的な表現を次の様に与えることが出来る．$\Delta\eta(s) = \eta(s) - \eta(s-)$，とおき，$t \geq 0$, $E \in \mathcal{B}(R^d)$

$$P^\eta(t, E) = \sum_{\substack{s \leq t \\ \Delta\eta(s) \neq 0}} \chi(\Delta\eta(s) \in E)$$

と次の様な kernel $N(s,\omega,du)$ が存在する。(s,ω) については very-well 可測で，du については positive measure で，

$$\widetilde{p^{\eta}(t,E)} = \int_0^t N(s,E)\,ds .$$

但し $\sim$ は $p^{\eta}(t,E)$ の naturalization を表す。symbolical に

$$q^{\eta}(t,du) = p^{\eta}(t,du) - N(t,du)ds$$

と q^{η} を定義する。（正確な定義は [3] 参照）そうすると

$$\eta_2(t) = \int_0^t \int u\, q^{\eta}(ds,du)$$

となることが示せて，$\eta_2(t)$ が 2 乗可積分なことに注意すれば，[3] の Th. 6.1 の証明より $N(s,du) = n(x(s),du)$ が分り，$\langle \eta_1 \rangle_t = \int_0^t a(x(s))ds$，となる。従って，$\eta_2(t)$ が $(\mathcal{F}_t)$-adapted，従って $\eta_1(t)$ も $(\mathcal{F}_t)$-adapted が云える。

ところで
$$\beta(t) = \int_0^t \sigma^{-1}(x(s))\,d\eta_1(s)$$

$$l(t) = \lim_{N\to\infty} l_N(t) \qquad \text{但し}$$

$$l_N(t) = \int_0^t \int_{|u|\le 1} c^{-1}(x(s-),u)\cdot \chi_N\left(c^{-1}(x(s-),u)\right) q^{\eta}(ds,du)$$

とおけば，結論を得る．但し $c^{-1}(x,u)$ は，仮定(A)の下で $c(x,\xi)$ は ξ の函数として，1対1になるから，その逆函数を表し，$\chi_N(x)=1$ (if $|x|\le N$), $=0$ (if $|x|>N$) とする．

§3．解析的な評価，一意性についての結果．

Prop. 1.1 から分る様に，(1) の uniqueness を示すには，$\mathcal{P}_x \ni \forall P$ に対し，$\mu_\lambda(f)= E\left[\int_0^\infty e^{-\lambda t} f(x(t))dt\right]$ が，$\forall f\in C_b(R^d)$[4) に対し，一意に決まることを云えばよい．μ_λ は resolvent に相当するものだから，perturbation の手法により既知の resolvent と結びつけて一意性を示す．このとき (I) $a>0$ (i.e. uniformly elliptic) のときは $\frac{1}{2}\Delta$ を main term に考え，(II) $a=0$ のときは α 次の対称安定過程の generator を main term に考える．どちらも大体同様にやれるが，(II) の場合について以下説明する．(評価は(I)の場合の方が簡単である)．operator $B^{(\alpha)}$ 及び $\tilde{B}^{(\alpha)}$ を次の様に定義する．

$$B^{(\alpha)}f(x)=\int_{|u|\le 1}\left\{f(x+u)-f(x)-\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\cdot u_i\right\}\frac{\varphi(0,0)}{|u|^{d+\alpha}}du$$

$$\tilde{B}^{(\alpha)}f(x)=\int_{|u|\le 1}\left\{f(x+u)-f(x)-\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)u_i\right\}\frac{\varphi(u)}{|u|^{d+\alpha}}+\sum_{i=1}^{d}c_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

但し，$\varphi(u)$ は可測で，$B_1\le\varphi(u)\le B_2$，$\forall u$，B_1, B_2 は仮定(A)での定数．$c=(c_1,\cdots,c_d)$ は定数ベクトル．

$B^{(\alpha)}$ に対応する加法過程の resolvent を $G_\lambda^{(\alpha)}$, $\widetilde{B}^{(\alpha)}$ に対応する加法過程の semigroup を $\widetilde{T}_t^{(\alpha)}$ とする．このとき，次の評価が成立する．

<u>Prop. 3.1</u>　$1 \leq \alpha < 2$.　$1 < p < \infty$

(i) 定数 $C = C(p, \alpha)$ が存在し　(B_1 には depend するが，C_i には indep)

$$\|\widetilde{T}_t^{(\alpha)} f\| \leq C \frac{1}{t^{d/\alpha p}} \|f\|_p \qquad \text{for } \forall f \in L^p(R^d),\ t > 0.$$ 6)

(ii) $p > \frac{d}{\alpha}$ ならば

$$\|G_\lambda^{(\alpha)} f\| \leq c\, \lambda^{-(1-\frac{d}{\alpha p})} \|f\|_p \quad \text{for } \forall f \in L^p(R^d),\ \lambda > 0$$

(iii) (イ) $1 < \alpha < 2$ に対し．$1 < \forall p < \infty$ について，

。定数 $C = C(p, \alpha)$ が存在して，

$$\left\|\frac{\partial}{\partial x_i} G_\lambda^{(\alpha)} f\right\|_p \leqq C\, \lambda^{-(1-\frac{1}{\alpha})} \|f\|_p \qquad \text{for } f \in C_K^\infty(R^d)$$ 5)

。$\forall \alpha' < \alpha$ に対し　定数 $C = C(p, \alpha, \alpha')$ が存在して

$$\left\|\frac{\partial}{\partial x_i} G_\lambda^{(\alpha)} f(\cdot + u) - \frac{\partial}{\partial x_i} G_\lambda^{(\alpha)} f(\cdot)\right\|_p$$

$$\leqq C\, |u|^{\alpha'(1-\frac{1}{\alpha})} \lambda^{-(1-\frac{1}{\alpha})(1-\frac{\alpha'}{\alpha})} \|f\|_p \quad \text{for } f \in C_K^\infty(R^d)$$

(ロ) $\alpha = 1$ のとき　$1 < \forall p < \infty$ について　定数 $C = C(p)$ が存在し

$$\left\|\frac{\partial}{\partial x_i} G_\lambda^{(1)} f\right\|_p \leqq C \|f\|_p \qquad \text{for } \forall f \in C_K^\infty(R^d),\ \forall \lambda > 0$$

Proof. transition probability $\widetilde{T}_t^{(\alpha)}(dy)$ ~~の~~ の Fourier 変換に対し，次の評価が成立することが分る．

$$\hat{\tilde{T}}_t^{(\alpha)}(\xi) = \int_{R^d} e^{iy\cdot\xi}\, \tilde{T}_t^{(\alpha)}(dy)$$ とおくと $\exists K>0$, $\exists C>0$ 定数

$$\left| \hat{\tilde{T}}_t^{(\alpha)}(\xi) \right| \leq K e^{-Ct|\xi|^\alpha} \qquad \forall t>0,\ \xi \in R^d,$$

従って $\tilde{T}_t^{(\alpha)}(dy)$ は Lebesgue 測度に関し density $p^{(\alpha)}(t,y)$ を持ち，

$\| p^{(\alpha)}(t,\cdot)\|_q \leq const.\left(\| \hat{\tilde{T}}_t^{(\alpha)}\|_1\right)^{1/q}$ を使えば，後は Young の不等式より明らか，$\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$．(ii) は (i) より従う．(iii) (イ) は本尾氏が [5] で sup norm の時行った方法が適用できる．(iii) (ロ) については [8] 参照．

以後 仮定 (A) は常に仮定し，$a=0$ の場合を考える．

$T_\lambda^{(\alpha)} = (A - B^{(\alpha)})G_\lambda^{(\alpha)}$ とおく．方程式 (1) より，Ito の公式を使って，$P \in \mathcal{P}_x$ (x: 任意に fix，P も任意に fix) に対し定義された μ_λ について，次式を得る．

$$\mu_\lambda (I - T_\lambda^{(\alpha)})h = G_\lambda^{(\alpha)} h(x) \qquad \forall h \in C_K^\infty$$

従って，μ_λ が $L^p(R^d)$ 上の bounded linear functional で，$\|T_\lambda\|_p < 1$ ということが，適当な p $(1<p<\infty)$ に対し証明できれば，μ_λ が一意に定まり，(1) の uniqueness が示される．

そのため

$$\phi_n(s) = \frac{k}{2^n} \quad \text{if } \frac{k}{2^n} \leq s < \frac{k+1}{2^n}, \quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots \quad n=1,2,\cdots$$

とおくとき，$\exists \{n'\} \subset \{n\}$，$\exists s_0 \in [0, 1]$:

$$(*)\ x_{n'}(t) = x(0) + \int_0^t b(x(\phi_{n'}(s-s_0)+s_0))ds$$

$$+ \int_0^t \int c(x((\phi_{n'}(s-s_0)+s_0)-, \xi)\, q(ds, d\xi)$$

と定義すれば，$x_{n'}(t) \longrightarrow x(t)$ in Prob. for $\forall t$ as $n' \to \infty$.

が [8] と同様な方法で示される．

$$\mu_\lambda^{(n')} f = E\left[\int_0^\infty e^{-\lambda t} f(x_{n'}(t))dt\right] \qquad f \in L^p(R^d)$$

とおくと $\mu_\lambda^{(n')}$ は仮定 (A) の下で bounded linear functional on $L^p(R^d)$ となる．実際，次の様に示される．簡単のため $s_0 = 0$，$n' = n$ とする．

$$\left| E\left[\int_0^\infty e^{-\lambda t} f(x_n(t))dt\right]\right| \leq \sum_{k=1}^\infty \left|E\left[\int_{\frac{k-1}{2^n}}^{\frac{k}{2}} e^{-\lambda t} f(x_n(t))dt\right]\right|$$

まず，

$$|I_1| = \left|E\left[\int_0^{\frac{1}{2^n}} e^{-\lambda t} f(x_n(t))dt\right]\right|$$

$$= \left|\int_0^{\frac{1}{2^n}} e^{-\lambda t} dt\, E\left[f\left(x + b(x)\cdot t + \int_0^t \int c(x, \xi) q(ds, d\xi)\right)\right]\right|$$

となるが，$x + b(x)\cdot t + \int_0^t \int c(x, \xi) q(ds, d\xi)$ は Lévy measure が $\chi_{(0<|u|\leq 1)}(u)\ \varphi(x, u)/|u|^{d+\alpha}\, du$ (x : fix) の

加法過程より Prop 3.1 (i) から、

$$|I_1| \le c\int_0^{1/2^n} e^{-\lambda t} \frac{1}{t^{\frac{d}{\alpha p}}} \|f\|_p \, dt \le c(n,1)\|f\|_p \quad \text{if } p > \frac{d}{\alpha}$$

以後 $p > \frac{d}{\alpha}$ なる $1 < p < \infty$ を固定する。

$$I_2 = E\left[\int_{1/2^n}^{2/2^n} e^{-\lambda t} f(x_n(t))\,dt\right]$$

$$= \int_{1/2^n}^{2/2^n} e^{-\lambda t}\,dt\, E\Big[f\Big(x + b(x)\tfrac{1}{2^n} + b(x(\tfrac{1}{2^n}))(t - \tfrac{1}{2^n})$$

$$+ \int_0^{1/2^n}\int c(x,\xi)\, q(ds, d\xi)$$

$$+ \int_{1/2^n}^{t}\int c(x(\tfrac{1}{2^n}-), \xi)\, q(ds, d\xi)\Big)\Big]$$

ここで $E[\;\;"\;\;] = E[\,E[\;\;"\;\;|\,\mathcal{F}_{\frac{1}{2^n}}]]$ なることと

$q(ds, d\xi) \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_{1/2^n}$ if $ds \subset (\frac{1}{2^n}, t]$

を使うと

$$E[\;\;"\;\;] = \int_\Omega P(d\omega')\int_\Omega P(d\omega'') f\Big[Y_t(\omega') + \int_{1/2^n}^{t}\int c(x(\tfrac{1}{2^n}-, \omega'), \xi)\, q(ds, d\xi, \omega'')\Big]$$

~~但し~~ 但し、$Y_t(\omega') = x + b(x)\frac{1}{2^n} + b(x(\frac{1}{2^n}, \omega'))(t - \frac{1}{2^n})$

$$+ \int_0^{1/2^n}\int c(x,\xi)\, q(ds, d\xi, \omega')$$

となり、やはり Prop 3.1 (i) より

$$\left| \int_\Omega P(dw'') f\left(Y_t(w') + \int_{\frac{1}{2^n}}^t \int c\left(x\left(\tfrac{1}{2^n}-, w'\right), \xi\right) q(ds, d\xi, \omega'')\right) \right|$$

$$\leqq \text{Const.} \frac{1}{\left(t-\frac{1}{2^n}\right)^{d/\alpha p}} \|f\|_p .$$

従って,

$$|I_2| \leq C(n,2)\|f\|_p$$

以下同様に評価でき，しかも $\sum_{k=1}^{\infty} C(n,k) < +\infty$ に注意すれば，

$$|\mu_\lambda^{(n)} f| \leq C(n) \|f\|_p \qquad (\text{if } \infty > p > \frac{d}{\alpha})$$

を得る．

そこで，$C(n)$が n に independent になる様にできればよいが，一般に，仮定(A)の下でいえるかどうか，まだ証明できないので，後で更に仮定を置かねばならない，その事情をみるため，$\alpha > 1$ の場合に計算を行ってみよう．

(*) の式に Ito の公式を適用して，次の式を得る．

$h \in C_K^\infty(R^d)$ に対し（簡単のため $s_0=0$, $n'=n$ とする）

$$\mu_\lambda^{(n)}(h) = G_\lambda^{(\alpha)} h(x) + E\left[\int_0^\infty e^{-\lambda t} b(x(\phi_n(t)) \cdot \nabla G_\lambda^{(\alpha)} h(x_n(t))\, dt\right]$$

$$+ E\left[\int_0^\infty e^{-\lambda t} dt \int_{|u|\leq 1} \left\{ G_\lambda^{(\alpha)} h(x_n(t)+u) - G_\lambda^{(\alpha)} h(x_n(t)) - \nabla G_\lambda^{(\alpha)} h(x_n(t)) \cdot u \right\} \times\right.$$

$$\times \left\{ \varphi\left(x(\phi_n(t)), u\right) - \varphi(0,0) \right\} \frac{du}{|u|^{d+\alpha}} \Bigg] = I_1 + I_2 + I_3$$

$$|I_1| \leq C(p,\alpha)\, \lambda^{-(1-\frac{d}{\alpha p})} \|f\|_p$$

$$|I_2| \leqq \|b\|\, \mu_\lambda^{(n)}\left(|\nabla G_\lambda^{(\alpha)} h|\right) \leqq \|b\|\, \|\mu_\lambda^{(n)}\|_p\, C(p,\alpha)\, \lambda^{-(1-\frac{1}{\alpha})} \|h\|_p$$

$$I_3 = E\left[\int_0^\infty e^{-\lambda t} dt \int_{|u|\leq 1} \{ \;\text{〃}\; \} \frac{\varphi(x(\phi_n(t)), u) - \varphi(x(\phi_n(t)), 0)}{|u|^{d+\alpha}} du \right]$$

$$+ E\left[\int_0^\infty e^{-\lambda t} dt \int_{|u|\leq 1} \{ \;\text{〃}\; \} \frac{\varphi(x(\phi_n(t)), 0) - \varphi(0,0)}{|u|^{d+\alpha}} du \right]$$

$$= I_3^1 + I_3^2$$ とおく.

$|I_3^1|$, $|I_3^2|$ を評価するため次の仮定を置く:

$$\begin{cases} |\varphi(x,u) - \varphi(x,0)| \leq C|u|^\delta & \text{for some } \delta > 0 \\ |\varphi(x,0) - \varphi(0,0)| < \dfrac{B_1}{2} & \\ \forall x,\ \forall u \text{ について成立.} \end{cases}$$

とすると

$$|I_3^1| \leq \int_{|u|\leq 1} \frac{C\, du}{|u|^{d+\alpha-\delta}} E\left[\int_0^\infty e^{-\lambda t} dt \left| G_\lambda^{(\alpha)} h(x_n(t)+u) - G_\lambda^{(\alpha)} h(x_n(t)) - \nabla G_\lambda^{(\alpha)} h(x_n(t)) \cdot u \right| \right]$$

$$= \int_{|u|\leq 1} \frac{c\, du}{|u|^{d+\alpha-\delta}} \mu_\lambda^{(n)}\left(|G_\lambda^{(\alpha)} h(\cdot+u) - G_\lambda^{(\alpha)} h(\cdot) - \nabla G_\lambda^{(\alpha)} h(\cdot)\cdot u| \right)$$

$$\leqq \int_{|u|\le 1} \frac{2C\,du}{|u|^{d+\alpha-\delta-\alpha''}} \|\mu_\lambda^{(n)}\|_p \|h\|_p \lambda^{-(1-\frac{1}{\alpha})(1-\frac{\alpha'}{\alpha})}$$

(Prop. 3.1 (iii) (イ))

但し，$\alpha'' = 1+\alpha'(1-\frac{1}{\alpha})$.

$\delta>0$ に応じて，$d+\alpha-\delta-\alpha''<1$ となる様に α' を十分 α に近くとれる（$\because$ $\alpha''\uparrow\alpha$ as $\alpha'\uparrow\alpha$）

又．
$$|I_3^2| \le \frac{1}{\varphi(0,0)} E\left[\int_0^\infty e^{-\lambda t}dt\, |\varphi(x(\phi_m(t)),0)-\varphi(0,0)| \left|B^{(\alpha)}G_\lambda^{(\alpha)}h(x_n(t))\right|\right]$$

$$\le \frac{\sup_x |\varphi(0,0)-\varphi(x,0)|}{\varphi(0,0)} \mu_\lambda^{(n)}(|B^{(\alpha)}G_\lambda^{(\alpha)}h|)$$

$$\le \varepsilon \|\mu_\lambda^{(n)}\|_p \|h\|_p$$

但し，
$$\varepsilon \equiv \frac{2\cdot\sup_x|\varphi(x,0)-\varphi(0,0)|}{B_1} < 1 .$$

従って，$|\mu_\lambda^{(n)}h| \le |I_1|+|I_2|+|I_3^1|+|I_3^2|$ より

λ_0 を十分大きくとれば，$\forall\lambda\geqq\lambda_0$ に対し，$(\lambda_0=\lambda_0(p,d,\alpha,\delta))$

$$\|\mu_\lambda^{(n)}\|_p \le \frac{C(p,\alpha)\lambda^{-(1-\frac{d}{\alpha p})}}{1-\left\{\|b\|\,C(p,\alpha)\lambda^{-(1-\frac{1}{\alpha})} + \int_{|u|\le1}\frac{2C\,du}{|u|^{d+\alpha-\delta-\alpha''}}\cdot\lambda^{-(1-\frac{1}{\alpha})(1-\frac{\alpha'}{\alpha})}+\varepsilon\right\}}$$

$$\mu_\lambda^{(n)} \longrightarrow \mu_\lambda \quad (n\to\infty) \quad \text{weakly}$$

ということを使えば，$\|\mu_\lambda^{(n)}\|_p$ をおさえる同じ式で $\|\mu_\lambda\|_p$

もおさえられる.

$\varphi(x,u)$ についての全く同じ仮定の下で, 上と同様なやり方で, $\lambda \geq \lambda_0$ のとき $\|T_\lambda^{(d)}\|_p < 1$ が示される

以上まとめて定理を述べる前に, 仮定をきっちり述べる.

仮定$(B_1\alpha)$: ① $1<\alpha<2$ のとき

- $$\sup_{\substack{x\in R^d \\ |u|\leq 1}} \frac{|\varphi(x,u)-\varphi(x,0)|}{|u|^\delta} < +\infty \quad \text{for some } \delta>0$$

- $$\sup_{x\in R^d} |\varphi(x,0)-\varphi(0,0)| < \frac{B_1}{2}$$

② $\alpha=1$ のとき 適当な ~~////~~ $p>d$ に対し

$$\varepsilon_1 = \|b\|C(p), \quad \varepsilon_2 = \frac{2}{B_1}\sup_{x\in R^d}|\varphi(x,0)-\varphi(0,0)|$$

$$\varepsilon_3 = \int_{|u|\leq 1} \frac{2C(p)}{|u|^{d-\delta}}du, \quad \varepsilon = \varepsilon(\delta) = \frac{1-(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}{\varepsilon_3}$$ とおくとき

$\varepsilon_1+\varepsilon_2 < 1$ かつ

$$\sup_{\substack{x\in R^d \\ |u|\leq 1}} \frac{|\varphi(x,u)-\varphi(x,0)|}{|u|^\delta} < \varepsilon(\delta) \quad \text{for some } \delta>0$$

但し, $C(p)$ は Prop. 3.1 (iii) の② で定まる定数.

このとき, 次の定理が成立する.

<u>Theorem</u>　(I) $a>0$ (i.e. unif. elliptic)のとき 且. 仮定(A) 及び, a が連続ならば, (1) の uniqueness が成立.
(II). $a=0$ のとき, 仮定(A) 及び仮定(B, α) の下で (1) の uniqueness が成立.

注]
1) $C_b^2(R^d)$ は, R^d で定義された2階迄の微係数がすべて有界連続な函数の全体を表す
2) 定義については, [1] 又は [6] 参照
3) 定義及び詳細は [4] 参照
4) $C_b(R^d)$ は, R^d で定義された有界連続な函数全体を表す.
5) $C_K^\infty(R^d)$ は, R^d で定義された無限回連続微分可能で, compact support をもつ函数全体
6) $\| \ \|$ は sup norm, $\| \ \|_p$ は Lebesgue measure に関する L^p-norm を表す.

文　献

[1] K. Ito : Mem. Amer. Math. Soc. 4 (1954)
[2]. T. Komatsu : 確率論セミナー四月シンポジウムにおける Short-Communication (1978)
[3]. H. Kunita - S. Watanabe : Nagoya Math. Jour.

30 (1967)

[4] P. A. Meyer : Probability and Potentials
Blaisdell Publ. Co. (1966)

[5] M. Motoo : PSG サマーセミナー講演 (1969)

[6] A. V. Skorohod : Studies in the theory of random processes (英訳, Addison Wesley 1965)

[7] D. W. Stroock – S. R. S. Varadhan : Comm. Pure Appl. Math XXII (1969)

[8] M. Tsuchiya : Jour. Math. Kyoto Univ. 10 (1970)

[9] ―――― : 数理研 講究録 112 (1971)

[10] T. Yamada – S. Watanabe : Jour. Math. Kyoto Univ. 11 (1971)